

Monopolos Magnéticos

Gabriel F. Magno^{1,*}

¹*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, CP 369, 13560-970, São Carlos, SP, Brasil*

Vamos apresentar três derivações da condição de quantização sobre a carga magnética usando o efeito Aharonov-Bohm, invariância de gauge e um método heurístico através dos níveis de Landau. Discutiremos qualitativamente um modelo de matéria condensada, chamado spin ice, que simula uma excitação parecida com uma carga magnética pura assim como apresentar um panorama da busca do monopolo magnético.

I. INTRODUÇÃO

Monopolos magnéticos são uma proposta plausível de partícula. Apesar da infeliz falta de evidências experimentais de sua existência, há razões teóricas sólidas para acreditar que o monopolo magnético deve existir, como: fazer as equações de Maxwell ainda mais simétricas e a existência de ao menos um monopolo magnético justificar a carga elétrica ser quantizada. Um monopolo magnético é uma carga magnética isolada, como um único polo ‘norte’ ou como um único polo ‘sul’. Desta maneira, tal como a densidade de carga elétrica produz uma divergência do campo elétrico \mathbf{E} , uma carga magnética deverá produzir uma divergência não nula do campo magnético \mathbf{B} , assim como uma densidade de corrente magnética produziria uma rotação de \mathbf{E} em torno de si. Quando admitimos monopolos magnéticos, as equações de Maxwell tomam uma particular forma simétrica no sistema c.g.s de unidades [1]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_e & ; & \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \\ -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m & ; & \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e. \end{aligned} \quad (1)$$

Onde ρ_m e \mathbf{j}_m são, respectivamente, as densidades de carga e corrente magnéticas. Se \mathcal{E} representa qualquer quantidade elétrica, \mathbf{E} , \mathbf{j}_e ou ρ_e , e \mathcal{M} é o correspondente magnético, então as equações (1) são invariantes segundo a transformação $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \rightarrow -\mathcal{E}$. Eletricidade e magnetismo se tornam completamente simétricos.

Dirac derivou em 1931 que o monopolo magnético aparece em quanta de carga $\frac{\hbar c}{2e}$ [2]. E surpreendentemente esta condição é usada para explicar a quantização da carga elétrica.

Vamos apresentar três derivações desse resultado fascinante, cada um possuindo uma diferente perspectiva sobre o monopolo magnético (Seção III). Em seguida, discutiremos qualitativamente o spin ice, um sistema de matéria condensada que apresenta uma excitação parecida com o monopolo (Seção IV A). Finalizamos mostrando um panorama de discussões e busca do monopolo magnético (Seção IV B).

II. ELETROMAGNETISMO NA MECÂNICA QUÂNTICA

É importante termos em mente algumas características do eletromagnetismo no contexto da mecânica quântica [3]. Os

campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ no caso estático, ou seja, independentes do tempo, são relacionados com os potenciais escalar $\phi(\mathbf{r})$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ por:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2)$$

Temos então uma redundância: se \mathbf{A} , ϕ descrevem \mathbf{E} , \mathbf{B} , podemos fazer uma transformação de gauge usando uma função $\chi(\mathbf{r})$ que produz $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\phi}$ que descrevem os mesmos \mathbf{E} , \mathbf{B} :

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} \quad ; \quad \mathbf{A} + \nabla\chi \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}. \quad (3)$$

Dado os potenciais eletromagnéticos em uma região do espaço, o Hamiltoniano de uma partícula com carga elétrica q e massa m é:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi. \quad (4)$$

Se a função de onda $|\Psi(t)\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger com o Hamiltoniano (4), então a função de onda

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \exp\left(\frac{iq\chi}{\hbar c}\right) |\Psi(t)\rangle, \quad (5)$$

também satisfaz a equação de Schrödinger para uma transformação de gauge (3) dos potenciais.

III. CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO

A carga magnética deve vir em um quanta bem definido, assim como a carga elétrica. Vamos derivar o valor desse quanta via Aharonov-Bohm (Seção III B), invariância de gauge (Seção III C) e níveis de Landau (Seção III D).

A. Potencial Vetor do Monopolo

Um monopolo magnético de carga g na origem produz um campo radial $\mathbf{B}_{\text{mon}} = \frac{g}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, que naturalmente tem

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{mon}} \neq 0. \quad (6)$$

Se quisermos que o campo magnético tenha divergência não nula porém mantendo a relação para \mathbf{B}_{mon} dada em (2) devemos escolher um potencial vetor com uma singularidade especial onde recuperamos a condição (6). Em coordenadas esféricas um possível potencial vetor seria:

$$\mathbf{A}_{\text{Dir}} = \frac{g(1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (7)$$

* gabriel.magno@usp.br

Esse potencial, chamado potencial vetor de Dirac, é singular para toda uma linha $\theta = \pi$, essa singularidade tem o nome de corda de Dirac.

Ainda temos que na condição de monopolo magnético na origem *não* há nenhum gauge tal que *qualquer* \mathbf{A} seja não-singular em todo espaço exceto a origem [4]. Para provar essa afirmação, considere uma família de loop's Γ_θ fixo θ e r com $\varphi \in [0, 2\pi]$, vamos agora integrar \mathbf{A} sobre Γ_θ . Sendo Σ a superfície cujo contorno é Γ_θ , se \mathbf{A} é *não-singular* fora da origem, podemos reescrever a integral usando o Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_\theta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^\theta d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta' \frac{g}{r^2} \\ &= 2\pi g(1 - \cos\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Mas, para $\theta \rightarrow \pi$, obtemos o valor $4\pi g$, uma contradição, pois nesse limite o loop Γ_θ colapsa em um ponto. Portanto, a afirmação que \mathbf{A} é não-singular fora da origem é falsa. Isso significa que todo potencial vetor de um monopolo magnético terá singularidades tipo corda de Dirac fora da origem. Transformações de gauge só mudariam a posição da corda de Dirac (Seção III C).

Do resultado (8) temos que o potencial vetor (7) terá $\nabla \times \mathbf{A}_{\text{Dir}} = (g/r^2)\hat{\mathbf{r}} + 4\pi g\theta(-z)\delta(y)\delta(x)\hat{\mathbf{z}}$ em conta do fluxo remanescente em $\theta = \pi$, assim podemos dizer que:

$$\mathbf{B}_{\text{mon}} = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{Dir}} - 4\pi g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

A relação (9) pode ser esquematizada pela Fig. 1, que motiva abordarmos o problema do monopolo utilizando um fino solenóide semi-infinito onde estaria a singularidade de \mathbf{A}_{Dir} (Seção III B), sendo estes totalmente não físicos, já que o \mathbf{B}_{mono} não apresentaria singularidades.

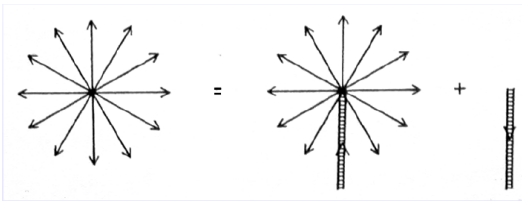


Figura 1: Modelando o monopolo como um fino solenóide semi-infinito ao longo do eixo z negativo. Retirada de [5]

B. Solenóide Semi-infinito

Imagine um solenóide, cada ponta produz o campo magnético correspondente a um polo de um dipolo magnético. Se um extremo do solenóide fica infinitamente distante, nós não veríamos um dipolo, mas sim um monopolo. Desta forma, um monopolo magnético pode ser interpretado como um extremo de um solenóide fino semi-infinito [6], Fig. 1. Mas

só faz sentido identificarmos esse objeto como um monopolo magnético se o solenóide fino semi-infinito for completamente não físico, ou seja, indetectável. Em particular, não produz nenhum deslocamento de fase em um experimento do tipo Aharonov-Bohm [7]. Vamos modelar o solenóide semi-infinito como um casca cilíndrica estendida da origem até $z \rightarrow -\infty$, com seção transversal S e corrente azimutal por unidade de comprimento λ . Cada anel de corrente do solenóide entre z e $z + dz$ produz um momento de dipolo [8]:

$$d\mathbf{m} = \frac{dIS\hat{\mathbf{z}}}{c} = \frac{\lambda dzS\hat{\mathbf{z}}}{c}. \quad (10)$$

Um momento de dipolo magnético \mathbf{m} na origem produz um potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (11)$$

Para computar o potencial vetor em todo espaço basta integrar as contribuições de cada momento de dipolo distribuídos de $z \in (-\infty, 0]$. No sistema de coordenadas esférico:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r, \theta, \varphi) &= \int \frac{d\mathbf{m} \times \mathbf{r}'(z')}{r'^3(z')} \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda S \sin\theta'(z')\hat{\varphi}}{cr'^2(z')} dz' \\ &= \left(\frac{\lambda S}{c}\right) \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

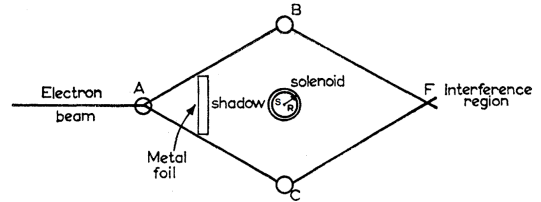


Figura 2: Detecção da presença do solenóide via efeito Aharonov-Bohm. As trajetórias do elétron circundam o solenóide. A amplitude de probabilidade na região de interferência é shiftada por um valor dependente de (13). Retirada de [7]

Comparando (7) e (12) identificamos a carga magnética $g \equiv \frac{\lambda S}{c}$. Utilizando agora um experimento de dupla-fenda com elétrons, como visto na Fig. 2, só obteremos resultado nulo se a diferença de fase entre funções de onda de elétrons, adquirida quando os eles são transportados por um caminho fechado que circunda o solenóide, é trivial:

$$\exp\left[\frac{-ie}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right] = \exp\left[\frac{-ie}{\hbar c} \Phi_B\right] = 1. \quad (13)$$

Onde e é a carga do elétron e $\Phi_B = 4\pi g$ o fluxo de \mathbf{B} por uma superfície que contém o caminho fechado feito pelos elétrons em torno do solenóide. Assim exigimos que a carga magnética satisfaça a *condição de quantização de Dirac*:

$$eg = n \frac{\hbar c}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

A carga magnética mínima permitida $g_D = \frac{\hbar c}{2e}$ é chamada carga magnética de Dirac. De (14) vemos que se monopolos magnéticos existem sua carga vem em quanta de um certo valor. Como $g \sim \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right) = \alpha \approx 1/137$, cargas magnéticas vem em porções de tamanho $\frac{1}{2\alpha} \approx \frac{137}{2}e$. Essa constante de proporcionalidade indica que dois monopolos magnéticos com carga g_D experimentam uma força Coulombiana ~ 4600 vezes mais intensa do que dois monopolos elétricos de carga e . Dirac acreditava que esta força tão acentuada explicava o porque polos magnéticos isolados não eram encontrados.

Mas talvez, o fato mais intrigante é que (14) pode explicar a quantização da carga elétrica. Se existir ao menos um monopolo magnético de carga g no universo, então teremos uma condição de quantização para carga elétrica $q = n\frac{\hbar c}{2g}$, onde q é uma carga elétrica qualquer. O fato de, em nosso universo, a carga elétrica ser quantizada indica a possibilidade de monopolos magnéticos.

Retornando a expressão (12), temos que esse potencial vetor é singular ao longo da linha $\theta = \pi$ que coincide com o solenóide infinitesimalmente fino e semi-infinito, a corda de Dirac. Como o solenóide é muito fino e invisível para experimentos do tipo Aharonov-Bohm, nenhum experimento poderia de fato detectá-lo; então estamos livres para movê-lo via transformações de gauge.

C. Invariância por Transformação Gauge

A corda de Dirac é considerada um fator embaraçoso na teoria do monopolo, portanto gostaríamos que fosse possível eliminá-la [6]. Podemos então derivar a condição de quantização olhando para o campo eletromagnético em torno do monopolo magnético e realizar transformações de gauge, movendo a corda de Dirac. A condição de quantização virá a tona quando impormos que a transformação de gauge é unívoca em todo espaço.

Vamos considerar o potencial vetor na esfera centrada no monopolo. O truque para evitar a corda é dividir a esfera em hemisfério superior e inferior e definir um potencial vetor para cada região, por exemplo:

$$A_\varphi = \begin{cases} A_\varphi^{sup} = g(1 - \cos\theta)/(r\sin\theta); & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ A_\varphi^{inf} = -g(1 + \cos\theta)/(r\sin\theta); & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (15)$$

Ambos A_φ^{sup} e A_φ^{inf} são não-singulares nos seus respectivos hemisférios, e ambos tem rotacional $\mathbf{B} = g\frac{\hat{r}}{r^2}$. Na região de intersecção dos hemisférios, o equador ($\theta = \pi/2$), devemos impor que A_φ^{sup} e A_φ^{inf} descrevem a mesma física, ou seja, eles diferem por uma transformação de gauge (3):

$$\begin{aligned} \nabla\chi &= A_\varphi^{sup}(\theta = \pi/2) - A_\varphi^{inf}(\theta = \pi/2) = \frac{2g}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \\ &\rightarrow \chi = 2g\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Colocando uma partícula com carga elétrica e na presença do monopolo magnético, quando ela é transportada pela região do equador, a mudança na fase da função de onda do

elétron (5) deve ser bem definida, por isso χ é unívoco:

$$\exp\left(\frac{2ieg\varphi}{\hbar c}\right)\Big|_{\varphi=0} = \exp\left(\frac{2ieg\varphi}{\hbar c}\right)\Big|_{\varphi=2\pi}. \quad (17)$$

Desta forma obtemos novamente a condição de quantização para carga magnética g , sem evocar uma corda de Dirac:

$$\frac{2ge}{\hbar c} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Essa abordagem pode ser aplicada para qualquer monopolo magnético, não importando a forma que ele é construído.

D. Níveis de Landau para Monopolos Magnéticos

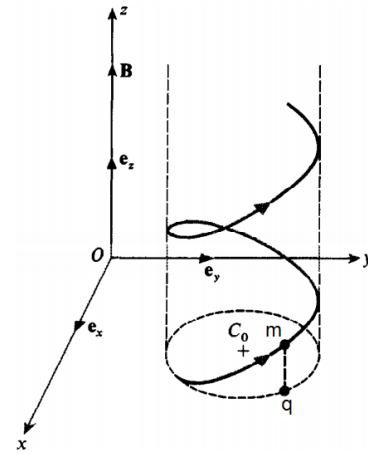


Figura 3: No caso elétrico, trajetória clássica de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme paralelo ao eixo z . A partícula se move com velocidade constante ao longo de uma hélice circular com eixo passando pelo ponto C_0 , paralelo a z . Na figura $q < 0$ (caso do elétron), onde $\omega_c = -qB/mc > 0$. Os níveis de Landau aparecem após estabelecermos relações de comutação para as componentes do Hamiltoniano clássico do sistema. Retirada de [9]

Se monopolos magnéticos existem, então é natural considerarmos um *análogo magnético* dos níveis de Landau [9], Fig. 3. Usaremos esse sistema para construir um argumento heurístico da condição de quantização.

Coloca-se um monopolo magnético de carga g e massa m dentro de um capacitor de placas paralelas ao plano xy . O capacitor produz um campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E\hat{z}$. Considerando que o monopolo tem apenas componentes de velocidade no plano xy , após quantizarmos o Hamiltoniano clássico, o monopolo terá energias $\hbar\omega_c(n + 1/2)$, onde $\omega_c = gE/mc$ e $n \in \mathbb{N}$.

Considerando o limite semi-clássico de altas energias $n + 1/2 \rightarrow n$. O monopolo irá rotacionar no plano xy sendo r o raio da órbita e v a velocidade tangencial a curva, onde a força de Lorentz $\mathbf{F}_l = gev/c$ é a resultante centrípeta do movimento, dessa forma:

$$E = \frac{mvc}{rg}. \quad (19)$$

Podemos relacionar a energia cinética da órbita com a energia quantizada do monopolo, usando a definição de ω_c e (19):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar \frac{v}{r} n. \quad (20)$$

Como temos apenas a componente J_z do momento angular, podemos achar uma relação de quantização para ela a partir de (20):

$$J_z = mrv = 2\hbar n. \quad (21)$$

Podemos usar o resultado de (21) para obter a quantização de E :

$$E = J_z \frac{c}{r^2 g} = \frac{\hbar c}{r^2 g} 2n. \quad (22)$$

A magnitude do campo elétrico entre as placas do capacitor, ambas tendo densidade de carga $\pm\sigma$, é dada por $E = 4\pi\sigma$. Se $\pm Q$ é a carga em cada placa diretamente acima ou abaixo da órbita, então $Q = \pi r^2 \sigma$. Assim temos novamente a condição de quantização de Dirac relacionando Q com (22):

$$E = 4Q/r^2 \quad ; \quad Q = \frac{\hbar c}{2g} n. \quad (23)$$

Então a carga sobre as placas é quantizada em unidades de $\frac{\hbar c}{2g}$, como Q é quantizado em unidades de e então g deve também o ser, só que em unidades de $\frac{\hbar c}{2e}$. Essa derivação ilustra a conexão entre a quantização de carga elétrica com quantização de carga magnética.

IV. MONOPOLOS MAGNÉTICOS REAIS

Infelizmente monopolos magnéticos verdadeiros nunca foram observados, porém existem sistemas que simulam excitações que lembram partículas com cargas magnéticas puras. Vamos então discutir qualitativamente um sistema de matéria condensada sob baixas temperaturas, o *spin ice*, que contém quasipartículas que se assemelham aos monopolos magnéticos. Além disso, mostraremos alguns trabalhos e discussões que tentam buscar e justificar a hipótese do monopolo.

A. Spin Ice

Certos materiais, conhecidos como *spin ices*, podem se comportar como se possuíssem um gás livre de monopolos magnéticos [10]. Exemplos de *spin ices* incluem $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ e $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$. Esses materiais exibem quasipartículas de monopolo magnético a temperaturas abaixo de 1K [11].

Spin ice é um sólido composto de um número de sítios, cada um com formato tetraedral, com um elétron em cada vértice do tetraedro. Essa configuração é chamada rede pirocloro. O spin do elétron é restrito a apontar diretamente para dentro ou fora do tetraedro, ao longo de um eixo conectando o centro de dois sítios consecutivos. O cristal e o eixo de cada spin são mostrados na Fig. 4.

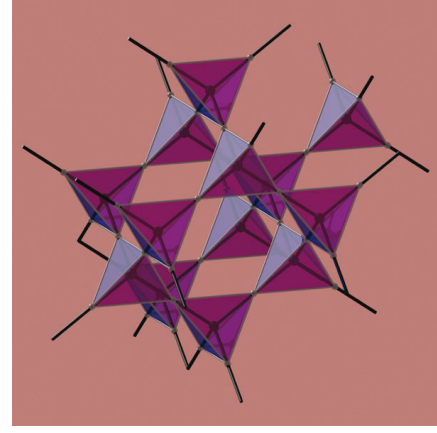


Figura 4: Rede pirocloro do spin ice. Cada spin reside ao longo de um eixo paralelo a uma das linhas pretas, que adentram o tetraedro pelos vértices e intersectam o seu centro. Retirada de [10]

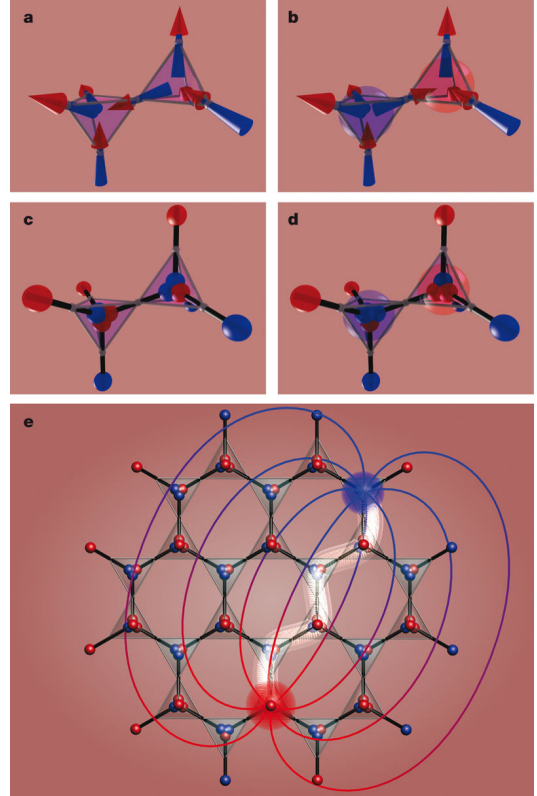


Figura 5: (c, d) são obtidas ao substituir cada spin em a e b por um par de cargas magnéticas opostas colocadas nos sítios mais adjacentes da rede. Em (a, c), as vizinhanças obedecem a regra do gelo, com dois spins apontando para dentro e dois para fora, dando carga magnética líquida zero em cada sítio. Já em (b, d), invertendo o spin compartilhado, um par de monopolos magnéticos aparece (sítios com carga magnética líquida), esta configuração tem um grande momento magnético. e mostra um par de monopolos separados (esferas vermelha e azul destacadas) por uma linha de dipolos conectados ('corda de Dirac') entre eles, destacada em branco, as linhas de campo também estão representadas. Retirada de [10]

Vamos aproximar o spin por um par de monopolos magnéticos ligados por um halteres. Fazendo isso, quando

a maioria dos spins aponta para dentro/fora, o sítio parece um monopolo magnético. O haltere é escolhido grande o suficiente para que cada monopolo resida no centro de cada sítio, Fig. 5(c,d).

A configuração de menor energia do sistema ocorre quando cada tetraedro tem dois spins apontando para dentro e dois apontando para fora, conhecida como *regra do gelo*. A explicação intuitiva para isso vem da aproximação de halteres, onde cada sítio no cristal deve contribuir com um termo de potencial do tipo Coulomb no Hamiltoniano do sistema, e o estado de menor energia deve ocorrer quando todos os sítios forem neutros.

Um grande número de configurações permitem a regra do gelo, dando um estado fundamental altamente degenerado. Se um único haltere (spin) é flipado, então um sítio no cristal terá uma carga magnética líquida positiva, e um sítio adjacente a ele terá carga magnética líquida negativa. Essas excitações produzem um par monopolo-antimonopolo livres para se mover ao longo do cristal através dos flipping's de spins adjacentes, diferentemente do par de monopolos confinados nos extremos de um solenóide visto na Seção III B, criando uma corda de dipolos flipados equivalente a corda de Dirac, Fig 5(e).

Por causa da força tipo-Coulomb entre os monopolos magnéticos cair com $1/r^2$, enquanto a interação dipolo-dipolo cai com $1/r^3$, podemos desconsiderar com boa aproximação contribuições do tipo dipolo-dipolo no Hamiltoniano [12]. Dessa forma o caminho de dipolos flipados não tem importância, não podemos afirmar que esse análogo a corda de Dirac exista sobre qualquer caminho particular conectando dois monopolos. Isso é análogo ao caso da ambiguidade na posição da corda de Dirac, que varia com o gauge, visto na Seção III C. Entretanto, essa corda de Dirac no cristal não é afísica, e a quantização do monopolo no sistema não obedece a condição de quantização de Dirac.

A existência dessas quasipartículas de monopolo magnético foi experimentalmente verificada. Usando $Dy_2Ti_2O_7$ foram medidas correntes magnéticas e interações tipo-Coulomb entre monopolos. Também foi determinado a condutividade magnética do material e medida a carga magnética das quasipartículas [11].

Esse é um exemplo de um sistema físico real em que se pode estudar quasipartículas de monopolos magnéticos

B. Panorama geral

Monopolos magnéticos ainda são amplamente procurados. Uma das técnicas se baseia no fato que corrente elétrica produz campo magnético circulante, corrente magnética deve produzir campo elétrico circulante. Se um monopolo magnético passar por um anel condutor deverá ser induzida uma corrente que é substancialmente diferente daquela gerada por um dipolo magnético passando por um anel condutor. Blas Cabrera [13] realizou esse tipo de experimento monitorando a corrente que atravessava um anel supercondutor por 151 dias. Uma candidata a detecção do monopolo carregando um g_D surgiu, porém esse resultado tentador não se repetiu. O consenso foi que essa detecção é inconclusiva.

Existem também experimentos que tentam criar o monopolo. Pesquisas anteriores no Tevatron, LEP, e HERA falharam na produção e detecção de monopolos magnéticos [12]. Esses resultados negativos sugerem que monopolos devem ter massa maior que TeV/c^2 . Atualmente ocorrem pesquisas em aceleradores de altas energias, como o experimento MOEDAL no LHC.

Outros experimentos tentam medir o fluxo de monopolos vindos de fontes astrofísicas [12]. O experimento MACRO usou um detector subterrâneo por 11 anos, todavia não foi detectado nenhum monopolo, assim colocaram um limite superior de $10^{-16}cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}$ sobre o fluxo de monopolos magnéticos. O experimento RICE também não detectou nenhum monopolo, baixando o limite superior para $10^{-18}cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}$.

O limite superior do fluxo de monopolos magnéticos também pode ser derivado através do campo magnético da nossa galáxia [12]. A Via Láctea é permeada por um campo magnético de cerca de $3\mu G$. Se um monopolo existe na nossa galáxia ele drenaria energia desse campo magnético com uma taxa de dissipação dependente do fluxo de monopolos. Monopolos pesados seriam dominados por forças gravitacionais, mas para monopolos leves, com massa $< 10^{17}GeV/c^2$, o fluxo pode ser limitado por $10^{-15}cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}$

Existe muita física na literatura sobre monopolos magnéticos. Um tratamento completo do assunto estaria fora do escopo desse trabalho. Vamos destacar mais alguns pontos relevantes:

- (a) Dirac, originalmente, obteve o seu resultado introduzindo uma extensão não usual da mecânica quântica, conhecida como *fatores de fase não integráveis* [2][4]. Esses fatores acabam determinando unicamente o campo eletromagnético. A condição de quantização resulta da imposição que todas as funções de onda não integráveis do sistema descrevem o mesmo campo magnético.
- (b) Existem muitas outras derivações da condição de quantização do monopolo magnético. Um mais simplista usa um argumento semi-clássico baseado na quantização do momento angular carregado por um campo eletromagnético [8]. O campo eletromagnético criado por um monopolo elétrico e magnético, ambos fixos, carrega um certo momento angular; afirmando que o momento angular vem quanta de $\hbar/2$, a condição de quantização de Dirac é obtida.
- (c) Monopolos magnéticos podem ser generalizados por *dyons*, partículas que carregam cargas elétricas e magnéticas [14] [15]. Se um dyon tem carga elétrica e_1 e magnética g_1 , e outro e_2 e g_2 , então $e_1g_1 - e_2g_2$ deve ser um múltiplo inteiro de $\hbar c/2$.
- (d) Uma teoria gran-unificada prevê a existência de monopolos magnéticos [1][16][17]. Sua massa é prevista com ordem de $10^{16}GeV/c^2$, muito além das energias alcançadas no aceleradores de partículas modernos.

- (e) Dada nossa atual compreensão da universo quando jovem, teorias gran-unificadas preveem a criação de muitos monopolos logo após o Big-Bang. O fluxo resultante de monopolos seria muitas ordens de grandeza maior do que os limites superiores existentes. Esse é o *problema do monopolo* [12], que motiva a teoria da inflação, em que a densidade de monopolos deveria decair substancialmente.

Apesar do apelo da teoria dos monopolos magnéticos sua existência física permanece não verificada. Se eles existem, são extraordinariamente raros.

V. CONCLUSÃO

Monopolos magnéticos são partículas completamente razoáveis, como o teórico das cordas Joseph Polchinski disse: “a existência de monopolos magnéticos parece ser uma das apostas mais seguras que se pode fazer sobre a física ainda não observada” [18]. Sua existência corrobora com previsões de teorias gran-unificadas da física de partículas, mas primordialmente explica a quantização da carga elétrica e introduz uma maior simetria entre eletricidade e magnetismo nas equações de Maxwell.

-
- [1] K. A. Milton, et. al, arXiv:hep-ph/0111062.
 [2] P. M. A. Dirac, Proc. R. Soc. London A **133**, 60 (1931).
 [3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*(Adison-Wesley Publishing Company, 1994).
 [4] T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. D **12**, 3845 (1975).
 [5] R. Schmitz, *Seminar on Theoretical Particle Physics* (Univ. of Bonn, 2006).
 [6] J. Preskill, *Magnetic Monopoles* (Caltech, 1984).
 [7] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev **115**, 485 (1959).
 [8] D. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, 1999).
 [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Volume 1 (Wiley, 1991).
 [10] C. Castelnovo, R. Moessner and S. L. Sondhi, Nature **451**, 42 (2008).
 [11] S. T. Bramwell, et. al, Nature **461 (7266)**, 956 (2009).
 [12] A. Rajantie, arXiv:1204.3073.
 [13] B. Cabrera, Phys. Rev. Lett. **48**, 1378 (1982).
 [14] J. Schwinger, Science **165**, 757 (1969).
 [15] D. Zwanzinger, Phys. Rev. **176**, 1489 (1968).
 [16] A. M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974).
 [17] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B. **79**, 276 (1974).
 [18] J. L. Pinfold, AIP Conf. Proc. **1304**, 234 (2010).